KALAOS : Kalao's Maritime Journal
Vol. 1, No. 2 Desember 2020
p-ISSN: 2776-2718, Hal 34-44

Ring Bersih-G(X) Kuat

Frisca Mareyta Pongoh
Dosen Matematika Politeknik PelayaranSulawesi Utara
mareytafrisca9@gmail.com

Abstract. *Let R be an associative ring with identity, let C(R) denoted the center of R, and let $g(x)$ be a polynomial in the polynomial ring C(R)[x]. Ring R is called strongly $g(x)$ - clean if every element can be written as $r = e + u$ with $g(e) = 0$, $r \in R$, u is a unit of R,and $eu = ue$. The relation between strongly $g(x)$ -clean rings and strongly clean ringsare determined, some general properties of strongly $g(x)$ -clean rings and clean idealare given. In this paper, by the definition and properties of clean ideal, we introducedefinition and properties of $g(x)$-clean ideal with some examples of it. If ring R is $g(x)$ -clean we must have that $g(x)$ has at least two roots in R. But, for an ideal in ringR, it can be $g(x)$ -clean although only $g(x)$ has one root in R. The example for thiscase is given.*

Keywords: clean ring, clean ring- strong $g(x)$, ideal clean $g(x)$

Abstrak. *Diberikan ring R merupakan ring dengan elemen satuan, notasi C(R) menyatakanhimpunan elemen center ring R, dan polinomial tertentu $g(x) \in C(R)[x]$. Ring Rdikatakan bersih-g(x) kuat, jika setiap elemen $r \in R$ dapat dinyatakan sebagai $r = e + u$ dengan $g(e) = 0$, u merupakan suatu unit di R, dan $eu = ue$. Dalam tesis ini dibahas sifat-sifat ring bersih- $g(x)$ dan ring bersih- $g(x)$ kuat serta hubungan keduanya. Dibahas juga konsep tentang ideal bersih. Dari konsep ini, diperkenalkan definisi dan beberapa sifat ideal bersih- $g(x)$ beserta contohnya. Pada ring R disyaratkan polinomial $g(x)$ memiliki sekurang-kurangnya dua akar di R agar ring R bersih- $g(x)$. Akan tetapi diberikan contoh ideal di ring R yang bersih- $g(x)$ untuk suatu $g(x)$ tertentu dengan $g(x)$ hanya memiliki satu akar di R.*

Kata kunci: ring bersih, ring bersih- $g(x)$ kuat, ideal bersih.

1. PENDAHULUAN

Menurut Nicholson (1977) [12], Rdisebut ring bersih apabila untuk setiap r ∈ R, r dapat dinyatakan sebagai r = e+u, untuk suatu e yang merupakan idempoten dan untuk suatu unit u. Selanjutnya dari definisi ini, dilanjutkan jika R bersih, dan eu =ue, maka R dikatakan bersih kuat. Kemudian, Fan dan Yang, (2008)[6], mendefinisikan bahwa jika untuk setiap r ∈ R, r = s + u, di mana g(s) = 0

untuk suatu polinomial g(x) dan untuk suatu unit u, maka R dikatakan bersih- g(x). Melalui pendefinisian ring bersihdan ring bersih-g(x), Wang dan Chen (2007)[14] serta Fan dan Yang (2008)[6] menyelidiki tentanghubungan antara ring bersih dan ring bersih-g(x). Selanjutnya dikaji pada ring bersih kuat dan ring bersih-g(x) kuat berdasarkan penyelidikan Fan dan Yang (2008), yaitu mengkaji sifat-sifatpada ring bersih kuat dan ring bersih- g(x) kuat, serta menyelidiki hubungan antara keduanya, berdasarkan

* *Frisca Mareyta Pongoh* , *mareytafrisca9@gmail.com*

hubungan antara ring bersih dan ring bersih-g(x).

Dari konsep ring bersih ini, Chen dan Chen (2002)[5] menyelidiki serta memperkenalkan konsep tentang idealbersih, yaitu jika I ideal dari ring R, Idikatakan ideal bersih apabila untuksetiap $x \in I$, $x = e+u$ untuk suatu $e \in Id(R)$ dan $u \in U(R)$, atau dengan kata lain, ideal bersih dari ring R adalah ideal yang setiap elemennyamerupakan elemen bersih. Sehingga jelas bahwa setiap ideal dari ringbersih merupakan ideal bersih. Lalu,bagaimana dengan ideal bersih-g(x)? **J**ika pada ring bersih g(x) mensyaratkan polinomial g(x) memiliki sekurang-kurangnya dua akar, maka pada ideal bersih-g(x), terdapat contoh ideal bersih-g(x) di mana polinomialg(x) hanya memiliki satu akar.

2. DASAR TEORI

2.1. Ring Bersih

Diberikan ring R merupakan ring bersih. Berarti setiap $r \in R$, dapat dinyatakan sebagai $r = e+u$, untuksuatu idempoten $e \in R$ dan suatu unit$u \in R$. Elemen idempoten dan elemen unit sendiri adalah elemen bersih. Hal ini mengakibatkan jika ring R merupakan ring Boolean maka R merupakan ring bersih karena semua elemennya merupakan idempoten, demikian pula jika R merupakan ring pembagi maka R bersih karena setiap elemen tak nol di R merupakan unit sedangkan elemen 0 sendiri adalah idempoten.

Berikut ini sifat dari ring bersih yang memiliki peranan penting untuk sifat- sifat lainnya.

Teorema 2.1 Bayangan homomorfisma dari suatu ring bersih R, oleh suatu homomorfisma adalah bersih.Kemudian diperoleh beberapa sifat dari ring bersih sebagai berikut.

Teorema 2.2. Diberikan keluarga ring $\{R_i\}_{(i \in I)}$ dengan I merupakanhimpunan indeks, $\prod_{(i \in I)} R_i$ bersih jika dan hanya jikauntuk setiap R_i bersih untuk setiap i ∈ I.

Bukti. (⇒)Dibentuk pengaitan $\theta_j : \prod_{(i \in I)} R_i \to R_j$ dengan definisiuntuk setiap $\{a_i\}_{(i \in I)} \in \prod_{(i \in I)} R_i$, $\theta_j(\{a_i\}_{(i \in I)}) = a_j$. Dapat diperoleh θ_j

bahwa epimorfisma. Sehingga, menurut Teorema 2.1 berarti R_j bersih.

($\Leftarrow$) Diambil sebarang $(a_i)_{(i\in I)} \in \prod_{(i\in I)} R_i$. Oleh karena R_i bersih untuk setiap $i \in I$, maka untuk setiap $x_i \in R_i$, $x_i = e_i + u_i$ di mana e_i adalah elemen idempoten di R_i dan u_i $\in U(R_i)$ untuk setiap $i \in I$. Selanjutnya, karena untuk setiap $i \in I$, $u_i \in U(R_i)$, maka $(u_i)_{(i\in I)} \in \prod_{(i\in I)} R_i$, dan karena untuk setiap $i \in I$, e_i merupakan elemen idempotent di R_i maka $(e_i)_{(i\in I)}$ adalah idempoten di $\prod_{(i\in I)} R_i$. Jadi, $\prod_{(i\in I)} R_i$ bersih.

Teorema 2.3. Diberikan ring R, dan $e \in$, di mana $e^2=e$. Jika ring eRe dan ring $(1-e)R(1-e)$ adalah bersih, maka ring R bersih.

Teorema 2.4. Diberikan ring R. Jika R bersih, maka $M_n(R)$ bersih untuk setiap $n \geq 1$.

2.2. *Ring Bersih Kuat*

Definisi 2.5. (Nicholson, 1999)[11]Diberikan ring R. Elemen $r \in R$ disebut bersih kuat (strongly clean) jika $r = e + u$, di mana $e^2=e$, $u \in U(R)$, dan $eu = ue$. Ring R disebut bersih kuat apabila untuk setiap elemen di R merupakan elemen bersih kuat.

Berikut ini diberikan beberapa sifat ring bersih kuat.

Teorema 2.6. Diberikan R bersih kuat. Bayangan homomorfisma dari Radalah bersih kuat.

Teorema 2.7. Diberikan keluarga ring $(R_i)_{(i\in I)}$, dengan I merupakan himpunan indeks. Perkalian langsung $\prod R_i$ bersih kuat jika dan hanya jika R_i bersih kuat, untuk setiap $i \in I$.

2.3. *Ideal Bersih*

Definisi 2.8. (Chen dan Chen, 2002)[5]Ideal I pada ring R disebut ideal bersih, apabila untuk setiap $a \in I$, $a = e + u$

untuk suatu $e \in Id(R)$ dan $u \in U(R)$.

Berdasarkan definisi di atas, dapat dikatakan bahwa ideal bersih merupakan ideal yang setiap elemennya merupakan elemen bersih. Sebagai akibatnya setiap ideal dari ring bersih merupakan ideal bersih. Berikut ini beberapa sifat dari ideal bersih.

Teorema 2.9. Diberikan ring R dan S, I ideal R dan pemetaan $f : R \to S$ merupakan epimorfisma. Jika I ideal bersih di R, maka f(I) merupakan ideal bersih di S, dengan $f(I) = \{f(i) \in S | i \in I\}$.

Teorema 2.10. Diketahui R_i merupakan ring dengan elemen satuan, untuk setiap $i \in N$. Ideal J_i merupakan ideal bersih R_i jika dan hanya jika $\prod J_i = \{(a_1, a_2, \ldots) | a_i \in J_i\}$ ideal bersih $\prod R_i = \{(r_1, r_2, \ldots) | r_i \in R_i\}$.

Teorema 2.11. Jika I merupakan ideal bersih dari ring R, maka $M_n(I)$ merupakan ideal bersih dari $M_n(R)$.

Setelah membahas tentang ring bersih dan ring ring bersih-g(x) beserta hubungan keduanya, berikut ini membahas tentang ring bersih kuat dan ring bersih-g(x) kuat, juga beserta hubungan keduanya.

3. RING BERSIH-g(x), RING BERSIH-g(x) KUAT, IDEAL BERSIH-g(x)

3.1 Ring Bersih-g(x)

Definisi 3.1. (Fan dan Yang, 2008)[6] Diberikan ring R, dan suatu polinomial tertentu $g(x) \in C(R)[x]$. Elemen $r \in R$ dikatakan bersih-g(x) apabila r dapat dinyatakan sebagai $r = s+u$, dengan $g(s) = 0$, dan $u \in U(R)$. Ring R bersih-g(x) apabila setiap elemen R bersih-g(x).

Definisi 3.2. (Fan dan Yang, 2008)[6] Diberikan ring R dan S serta homomorfisma $\theta : C(R) \to C(S)$, dengan $\theta(1) = 1$. Untuk $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in C(R)[x]$, didefinisikan $\theta'(g(x)) := \sum_{i=0}^{n} (\theta(a_i) x^i) \in C(S)[x]$.

Dari definisi di atas, maka θ membangkitkan suatu pemetaan θ' dari C(R)[x] ke

$C(S)[x]$. Jika $g(x)$ merupakan polinomial dengan koefisiennya elemen di $\mathbb{Z}$, maka $\theta'(g(x)) = g(x)$.

Teorema 3.3. Diberikan $\theta : R \to S$, merupakan epimorfisma ring. Jika R bersih-$g(x)$, maka S bersih-$\theta'(g(x))$.

Bukti. Diambil sebarang $g(x) \in C(R)[x]$, dengan $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ maka $\theta'(g(x)) = \theta'(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)$ $\in C(S)[x]$. Karena θ epimorfisma dan R bersih-$g(x)$, maka untuk sebarang $r \in R$, $r = e + u$, dengan

$g(e) = 0$ dan $u \in U(R)$. Diperoleh

$\theta(r)=\theta(e)+\theta(u)$. Selanjutnya, karena $u \in U(R)$, maka terdapat $b \in R$, sedemikian hingga $u.b = 1$. Lebih lanjut lagi
diperoleh, $\theta(u).\theta(b) = \theta(ub) = \theta(1) = 1$,

maka $\theta(u) \in U(S)$. Dan $\theta'(g(\theta(e))) = 0$. Jadi S bersih-$\theta'(g(x))$.

Akibat 3.4. Jika R bersih-$g(x)$, maka R/I bersih-$\bar{g}(x)$, untuk setiap ideal I dari R, dengan $\bar{g}(x) \in C(R/I)[x]$.

Akibat 3.5. Diberikan ring R dan $g(x) \in C(R)[x]$. Maka ring $R[[t]]$ bersih-$g(x)$ jikadan hanya jika R bersih-$g(x)$.

Teorema 3.6. Diberikan $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ danmerupakan $\{R_i\}_{(i \in I)}$ keluarga ring. Maka $\prod_{(i \in I)} R_i$ adalah bersih-$g(x)$ jika dan hanya jika Ri adalah bersih-$g(x)$untuk setiap $i \in I$.

Teorema 3.7. Diberikan ring R dan $g(x)$ $\in C(R)[x]$. Jika ring R bersih-$g(x)$, maka ring matriks $M_n(R)$ bersih-$g(x)$ untuk setiap $n \geq 1$.

Berikut ini diberikan contoh yang menunjukkan hubungan antara ring bersih dan ring bersih-$g(x)$. Contoh 3.8 menyatakan ring yang bersih-$g(x)$untuk suatu polinomial $g(x)$ tertentu, tapi bukan ring bersih.

Contoh 3.8. Diberikan $\mathbb{Z}_{(7)} = \{m,n \in \mathbb{Q} \mid$ a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $7 \nmid b\}$, dan grup siklik berorder tiga $C_3 = \{1, a, a^2\} = \langle a \rangle$ dengan $a^3 = 1$, maka ring grup $\mathbb{Z}_{(7)} C_3$ adalah bersih-$(x^4 - x)$, tapi $\mathbb{Z}_{(7)} C_3$ tidak bersih.

z

z

Contoh berikut ini menyatakan ring yang bersih tapi tidak bersih-g(x).

Contoh 3.9. Diberikan ring Rmerupakan ring Boolean, dengan $|R| > 2$ dan $c \in R$, $0 \neq c \neq 1$. Diberikan juga polinomial $g(x) = (x + 1)(x + c)$. Maka R
tidak bersih-g(x).

Kemudian sifat-sifat berikut ini menunjukkan hubungan antara ring bersih dan ring bersih-g(x).

Teorema 3.10. Diberikan ring R dan polinomial $g(x) \in (x-a)(x-b)C(R)[x]$, dengan $a, b \in C(R)$ sedemikian hingga $b-a \in U(R)$. Ring R bersih jika dan hanya jika R bersih-$(x-a)(x-b)$.

Akibat 3.11. Diberikan ring R danpolinomial $g(x) \in (x-a)(x-b)C(R)[x]$, dengan $a, b \in C(R)$ sedemikian hingga $b-a \in U(R)$. Jika R bersih, maka R bersih g(x).

3.2. *Ring Bersih-g(x) Kuat*

Definisi 3.12. (Fan dan Yang, 2008)[7] Diberikan polinomial $g(x) \in C(R)[x]$. Suatu elemen $r \in R$ dikatakan bersih-g(x) kuat, apabila r dapat dinyatakan sebagai $r = s + u$, dengan $g(s) = 0$, $u \in U(R)$, dan $su = us$. Ring R bersih-g(x)
kuat apabila setiap elemen R bersih- g(x) kuat.

Sama halnya pada langkah awal mengkaji sifat-sifat pada ring bersih- g(x), dengan mengansumsikan θ dan θ' seperti pada Definisi 3.2, diberikan sifat berikut ini dan beberapa sifat lainnya dari ring bersih-g(x) kuat.

Teorema 3.13. Diberikan $\theta : R \rightarrow S$, merupakan epimorfisma ring. Jika R bersih-g(x) kuat, maka S bersih-$\theta'(g(x))$ kuat.

Akibat 3.14. Jika R bersih-g(x) kuat, maka R/I bersih-$\overline{g(x)}$ kuat, untuk setiapideal I dari R, di mana $\overline{g(x)} \in C(R/I)[x]$.

Akibat 3.15. Diberikan ring R, $g(x) \in C(R)[x]$, dan $1 < n \in \mathbb{N}$. Jika matriks segitiga atas $T_n(R)$ bersih-g(x)
kuat, maka R bersih-g(x) kuat.

Teorema 3.16. Diberikan $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$dan merupakan keluarga ring.
Maka $(R_i)_{(i \in I)}$ adalah bersih-g(x) kuat
$\prod_{(i \in I)} R_i$

jika dan hanya jika Ri adalah bersih-g(x)kuat untuk setiap i $\in$ I.

Berikut ini dijelaskan hubungan antara ring bersih kuat dan ring bersih- g(x) kuat.

Teorema 3.17. Diberikan ring R dan g(x)

$\in$ (x−a)(x−b)C(R)[x], dengan a, b $\in$ C(R),maka pernyataan berikut berlaku.

1. R bersih-(x − a)(x − b) kuat jika dan hanya jika R bersih kuat dan (b − a) $\in$ U(R)
2. Jika R bersih kuat dan (b − a) $\in$
   U(R), maka R bersih-g(x) kuat.

Bukti.

1. Untuk membuktikan pernyataan ini,berdasarkan Teorema 3.10, diperoleh bahwa jika R bersih, maka R bersih-g(x). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa [e(b−a) + a][u(b − a)] = [u(b−a)]e(b−a) +a]. Oleh karena diketahui R bersih kuat, dan a , b $\in$ C(R), maka
   [e(b−a)+a]+[u(b−a)]=[u(b−a)]e(b−a)
   +a].
2. Berdasarkan Akibat 3.11,selanjutnya akan dibuktikan $\frac{e-a}{b-a}\cdot\frac{u}{b-a}=$
   $\frac{u}{b-a}\cdot\frac{e-a}{b-a}$. Oleh karena a, b
   $\in$ R dan karena R bersih kuat,maka pernyataan terbukti.

Selanjutnya terkait dengan ringeRe, maka diperoleh sifat berikut.

Teorema 3.18. Diberikan ring R bersih- (x−a)(x − b) kuat dengan a, b $\in$ C(R), maka untuk setiap e^2= 2 $\in$ R, ring eRe bersih-(x − ea)(x − eb) kuat.

Dengan meninjau beberapapolinomial g(x) tertentu, diperoleh sifat -sifat berikut ini.

Teorema 3.19. Diberikan ring R dan n $\in$

N, maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. Ring R bersih-($x^2-2^n x$) kuat.
2. Ring R bersih-(x^2-1) kuat.
3. Ring R bersih kuat dan 2 $\in$ U(R).
4. Untuk R = U_2(R) dan untuk setiap a $\in$ R, a dapatdinyatakan sebagai a = u +

v dengan u, v $\in$ U(R), uv = vu, dan $v^2 = 1$.

Teorema 3.20. Diberikan ring R dengan c,d $\in$ C(R) dan d $\in$ U(R). Jika R bersih-(x^2+cx+d) kuat, maka R = U_2(R). Lebih lanjut, jika R bersih-(x^2+x+1) kuat,maka R = U_2(R) bersih-($x^4 - x$) kuat

Teorema 3.21. Diberikan ring R bersih- ($x^n - x$) kuat, dengan n ≥ 2. Untuk setiapa $\in$ R memenuhi salah satu atau kedua sifat berikut.

i. a = u+v di mana u $\in$ U(R), $v^{n-1} = 1$, dan uv = vu.
ii. aR dan Ra memuat idempoten tidak sederhana.

Teorema 3.22. Diberikan ring R dan n $\in \mathbb{N}$. Ring R bersih-(ax^2n-bx) kuat jika dan hanya jika ring R bersih-($ax^2n+ bx$) kuat.

Contoh 3.23. Diberikan ring matriks diagonal berukuran 2 × 2 atas bilangan ril, yaitu $D_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ dan polinomial $g(x) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$. Maka, ring $D_2(\mathbb{R})$ bersih-g(x) kuat.

3.3. *Ideal Bersih-g(x)*

Berikut ini didefinisikan ideal bersih-g(x) beserta sifat-sifatnya.

Definisi 3.24. Diberikan I ideal ring R, dan polinomial g(x) $\in$ C(R)[x]. Ideal I dikatakan ideal bersih apabila untuksetiap a $\in$ I, a dapat dinyatakan sebagai a = s+u di mana g(s) = 0 danuntuk suatu u $\in$ U(R).

Selanjutnya sifat di bawah ini menjelaskan bayangan dari ideal yangbersih-g(x), di mana terdapatpemetaan φ′ yang dibangkitkan oleh pemetaan φ yang surjektif dengan definisi φ dan φ′ seperti yang diberikan pada Definisi 3.2 dibagian sebelumnya.

Teorema 3.25. Diberikan ring R dan S, I ideal di R, pemetaan φ : R → S yang surjektif, dan polinomial g(x) $\in$ C(R)[x]. Jika I ideal bersih-g(x) di R, maka φ(I) merupakan ideal bersih-φ′ g(x) di S, dengan φ(I) = {φ(i) $\in$ S|i $\in$ I}.

Beberapa sifat lainnya yang berlaku untuk ideal bersih-g(x) sebagai berikut.

Teorema 3.26. Diberikan ring R_i merupakan ring dengan elemen satuan untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ dan polinomial $g(x) \in C(R_i)[x]$. Ideal J_i merupakan ideal bersih-g(x) dari R_i jika dan hanya jika $\prod J_i = \{(a_i)_{i\in \mathbb{N}} \mid a_i \in J_i\}$ ideal bersih-g(x) di $\prod R_i = \{(r_i)_{i\in \mathbb{N}} \mid r_i \in R_i\}$.

Teorema 3.27. Diberikan ring R dan polinomial $g(x) \in C(R)[x]$. Jika I merupakan ideal bersih-g(x) dari ring R, maka $M_n(I)$ merupakan ideal bersih-g(x) dari ring $M_n(R)$.

Selanjutnya di bawah ini diberikan contoh ring yang tidak bersih-g(x)untuk suatu polinomial g(x) tertentu, tapi memiliki ideal yang bersih-g(x).

Contoh 3.28. Diberikan ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, dan polinomial $[x + (1, 1)][x + (0, 1)] \in (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)[x]$, maka $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tidak bersih-g(x). Diperhatikan akar g(x) adalah (0, 1), dan (1, 1), serta elemen unit di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ adalah (1, 1). Terdapat $(0, 1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai penjumlahan salah satu akar g(x) dan unit di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dibentuk himpunan P = {(0, 0), (1, 0)}adalah ideal di $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Lebih lanjut lagi, (0, 0) = (1, 1) + (1, 1) dan (1, 0) = (0, 1) + (1, 1). Atau dengan kata lain idealP bersih-g(x).

Berikut ini contoh ring R yang bersih-g(x) tapi tidak bersih-h(x), akan tetapi terdapat ideal di R yang bersih- h(x).

Contoh 3.29. Diberikan ring $\mathbb{Z}_8$:{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, polinomial $g(x) = x^2-3x$, $h(x) = 2x^2+x-7$, dengan $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}_8[x]$. Diperhatikan bahwa $\mathbb{Z}_8$ bersih-g(x)tetapi tidak bersih-h(x). Lebih lanjutlagi, himpunan $2\mathbb{Z}_8 = \{0, 2, 4, 6\}$, dan $4\mathbb{Z}_8 = \{0, 4\}$ merupakan ideal di $\mathbb{Z}_8$. Tiap elemen dari ideal $2\mathbb{Z}_8$ dan ideal $4\mathbb{Z}_8$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan akar polinomial h(x) dan suatu unit di $\mathbb{Z}_8$.

Jadi, $2\mathbb{Z}_8$ dan $4\mathbb{Z}_8$ merupakan ideal bersih-h(x).

4. KESIMPULAN

Syarat cukup dan perlu suatu ringbersih merupakan ring bersih-g(x).

1. Diberikan ring R dan polinomial g(x) $\in (x-a)(x-b)C(R)[x]$, dengan a, b $\in C(R)$ sedemikian hingga $b-a \in U(R)$. Ring R bersih jika dan hanya jika R bersih-$(x-a)(x-b)$.
2. Diberikan ring R dan polinomial g(x) $\in (x-a)(x-b)C(R)[x]$, dengan a, b $\in C(R)$ sedemikian hingga $b-a \in U(R)$. Jika R bersih, maka R bersih g(x).
3. Diberikan ring R. Ring R bersih jika dan hanya jika R bersih-(x^2+x).

Syarat cukup dan perlu suatu ringbersih kuat merupakan ring bersih-g(x) kuat.

Diberikan ring R dan g(x) $\in (x-a)(x-b)C(R)[x]$, dengan a, b $\in C(R)$, maka pernyataan berikut berlaku.

1. R bersih-$(x-a)(x-b)$ kuat jika dan hanya jika R bersih kuat dan $(b-a) \in U(R)$
2. Jika R bersih kuat dan $(b-a) \in U(R)$, maka R bersih-g(x) kuat.

Apabila dibandingkan dengan sifat -sifat pada ideal bersih, sifat-sifat tersebut ternyata juga berlaku pada ideal bersih-g(x). Selanjutnya, jika pada ring mensyaratkan polinomial g(x) memiliki paling sedikit dua akar agar ring R bersih-g(x). Akan tetapi terdapat contoh ideal di ring R yang bersih-g(x) untuk suatu g(x) tertentu dengan g(x)hanya memiliki satu akar di R sepertipada Contoh 3.29

REFERENSI

[1] Adkins dan Weintraub, 1992, Algebra: An Approach via Module Theory, Springer-Verlag New YorkInc., USA.

[2] Brown, W., 1993, Matrices over Commutative Rings, Marcel Dekker, Inc., United States of America.

[3] Camillo dan Simon, 2002, The Nicholson-Varadarajan Theorem on Clean Linear Transformation, Glasgow Math J, 44, pp. 365-369.

[4] Chen, W., 2006, A Question on Strongly Clean Rings, Communications in

Algebra, 34, pp.2347-2350.

[5] Chen dan Chen, 2002, On Clean Ideals, IJMMS, 62, pp. 3949-3956.

[6] Fan dan Yang, 2008, On RingsWhose Elements are The Sum of a Unit and a Root of a Fixed Polynomial, Communi-cations inAlgebra, 36, pp. 269-278.

[7] Fan dan Yang, 2008, On Strongly g(x)-Clean Rings, , , pp. .

[8] Han dan Nicholson, 2001, Extensions of Clean Rings, Communications in Algebra, 29, pp.2589-2595.

[9] Immormino, N, A., 2000, SomeNote on Clean Rings, Bowling Green State University, UnitedStates of America..

[10] Malik, Mordeson, dan Sen, 1997,Fundamental of Abstract Algebra, The McGraw-Hill Companies, Inc., United States of America.

[11] Nicholson, W. K., 1999, Strongly Clean Rings and Fitting's Lemma, Communications In Algebra, 27(8),pp. 3583-3592.

[12] Nicholson, W. K., 1977, Lifting Idempotent and Exchange Rings, Trans.Amer. Math. Soc., 229, pp. 269-278.

[13] Rowen, L.H., 1988, Ring Theory, Academic Press, Inc., San Diego.

[14] Wang dan Chen, 2007, A Note On Clean Rings, Algebra Colloqium, 14, pp. 537-540.

[15] Wisbauer, R., 1991, Foundationsof Module and Ring Theory, Gordonand Breach Science Publisher, Reading Dusserdorf.